

APLICAÇÃO DA PROGRAMAÇÃO LINEAR NA RESOLUÇÃO DO PROBLEMA DE ENSALAMENTO

Flávia D. Cruz – flaviadacruz@outlook.com
Centro Universitário Autônomo do Brasil - Unibrasil.

Felipe L. Kellner - kellnerr_@hotmail.com
Centro Universitário Autônomo do Brasil - Unibrasil.

Anderson C. Bonini - ander_bonini89@hotmail.com
Centro Universitário Autônomo do Brasil - Unibrasil.

Natália G. D. Silva - natalia15_@hotmail.com.br
Centro Universitário Autônomo do Brasil - Unibrasil.

Ana P. Oening – anaoening@unibrasil.com.br
Centro Universitário Autônomo do Brasil – Unibrasil / Institutos LACTEC

Antônio C. C. Barros – antoniobarros@unibrasil.com.br
Centro Universitário Autônomo do Brasil - Unibrasil.

Resumo: A Pesquisa Operacional vem desempenhando um papel muito importante sendo utilizada na resolução de problemas reais complexos e robustos, como o problema de roteirização de veículos, de corte de materiais em uma fábrica, problemas de escalonamento de máquinas ou tarefas, planejamento da produção, problemas de localização, entre outros. Nesta linha de aplicações, surgem os problemas de ensalamento e definição de horários de professores em escolas e Universidades. Nesses problemas busca-se distribuir as diversas turmas nas salas disponíveis, respeitando o número de alunos matriculados, capacidade das salas, restrições físicas e outras restrições das instituições de ensino. O principal objetivo é minimizar a distância a ser percorrida pelos alunos no deslocamento entre as salas. Neste trabalho foi abordado o problema do ensalamento, através do estudo de suas características, sua modelagem matemática, implementação computacional e métodos de solução. Foram estudadas e testadas modelagens distintas para o problema, buscando uma solução que seja viável tanto na teoria quanto na prática. O modelo matemático do problema do ensalamento foi implementado no software MATLAB e foram utilizados dois casos distintos para testar e validar esse desenvolvimento. Assim, o problema a ser solucionado passa a ser o de otimizar o espaço físico existente, designando salas e blocos em que as turmas terão aulas, de acordo com diversos critérios, como proximidade entre as turmas do mesmo curso, tamanho das salas, número de alunos matriculados, entre outros.

Palavras-chave: Programação linear, Otimização, Problema de ensalamento.

1. INTRODUÇÃO

Técnicas de otimização vem sendo muito utilizadas atualmente na resolução de problemas reais. A modelagem é a principal ferramenta que busca modelar matematicamente o problema e posteriormente através de um algoritmo apresentar solução para esse modelo. Em geral, para formular um modelo matemático, simplificações razoáveis do sistema ou problema real precisam ser consideradas e a validação do modelo depende de a solução do modelo matemático ser coerente com o contexto original. Com isso, o modelo matemático é uma representação simplificada do problema real, ele deve ser suficientemente detalhado para captar os elementos essenciais do problema, mas suficientemente tratável por métodos de resolução. Exemplos de modelos matemáticos são os de programação matemática, como a programação linear, programação linear inteira, programação em redes e programação não linear (ARENALES et al, 2007).

O modelo escolhido para a resolução do problema de ensalamento, que será apresentado no decorrer deste artigo, é a programação linear. Este modelo trata da definição de horários de professores em escolas e universidades e é um problema comum em todas as instituições de ensino, que contempla a construção de horários de aulas para os docentes e alocação de salas para as disciplinas, atendendo as restrições tanto de professores e alunos como de toda instituição envolvida. Normalmente, as restrições estão relacionadas a conflitos de horários de aula, alocação de salas mais adequadas para cada disciplina/turma, preferências (da disciplina e/ou professor) por horários. Em todo início de semestre, ou de ano letivo, a maioria das instituições de ensino precisam elaborar o quadro de horários. Essa tarefa, quando efetuada manualmente, pode acarretar em vários dias de trabalho e, muitas vezes, não atinge uma solução satisfatória devido ao grau de complexidade desse problema combinatório (SOUZA, 2000).

Para o desenvolvimento deste trabalho foram estudados os problemas clássicos de programação linear, designação e localização, bem como os algoritmos clássicos de solução desses problemas, sem aprofundamento em métodos heurísticos de otimização. Por facilidade de entendimento, a implementação computacional foi realizada utilizando o Software MATLAB, que possui diversas técnicas já implementadas, facilitando a concentração dos esforços no tratamento do problema e análise técnica dos resultados.

Foram realizados dois casos teste, baseados em dois trabalhos, que fornecem dados de um problema fictício e de um problema real de ensalamento, para testar e validar o modelo implementado.

2. MODELOS PROBLEMAS DE PROGRAMAÇÃO LINEAR

Um modelo descreve, representa e imita o procedimento que ocorre no mundo real, estabelecendo o relacionamento das variáveis com os objetivos, da melhor maneira possível, obedecendo à limitação de tempo e de custo. Um modelo matemático é uma representação simplificada de uma situação real e deve refletir a essência do problema, representando as grandezas envolvidas por variáveis e as relações de interdependência existentes entre elas por expressões matemáticas. O modelo mais adequado depende de vários fatores: a natureza das relações entre as variáveis, os objetivos almejados, a extensão do controle sobre as variáveis e o nível de incerteza existente tanto nas relações entre as variáveis como na própria definição das variáveis. Para cada conjunto de situações específicas o modelo matemático, doravante denominado somente modelo, deverá ter uma forma padronizada e a solução poderá ser obtida por métodos matemáticos específicos para cada caso, que serão estudados posteriormente.

Um modelo de um problema de programação linear pode ser representado, em sua forma padrão, conforme descrito a seguir (1):

$$\begin{aligned}
&\text{minimizar} && f(x_1, x_2, \dots, x_n) = c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n \\
&\text{sujeito a:} && a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\
&&& a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\
&&& \vdots \\
&&& a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \\
&&& x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, \dots, x_n \geq 0
\end{aligned} \tag{1}$$

A função linear f dada na Equação (1), a ser minimizada, é chamada função objetivo, o sistema de equações lineares define as restrições do problema, juntamente com as condições de não negatividade das variáveis. O problema (1) pode ser escrito, equivalentemente, em notação matricial como na Equação (2):

$$\begin{aligned}
&\text{minimizar} && f(x) = c^t x \\
&\text{sujeito a:} && Ax \leq b \\
&&& x \geq 0
\end{aligned} \tag{2}$$

onde $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$ é uma matriz $m \times n$, chamada matriz dos coeficientes (ou matriz tecnológica); $c^t = (c_1 \ c_2 \ \dots \ c_n)$ é o vetor de custos; $x^t = (x_1 \ x_2 \ \dots \ x_n)$ é o vetor das variáveis ou incógnitas; e $b^t = (b_1 \ b_2 \ \dots \ b_m)$ é o vetor dos termos independentes ou de recursos.

Na forma padrão, o problema de otimização linear tem as seguintes características:

- a função objetivo deve ser minimizada;
- as restrições do problema são definidas por um sistema de equações lineares;
- as condições de não negatividade de todas as variáveis de decisão complementam as restrições do problema.

Qualquer problema de otimização linear pode ser escrito na forma padrão e, sem perda de generalidade, desenvolvimentos teóricos, métodos e propriedades de problemas de otimização linear podem ser apresentados considerando o problema nesta forma.

O Método Simplex publicado por Dantzig em 1947, foi desenvolvido para resolver problemas de programação linear e foi um marco definitivo para a disseminação da Pesquisa Operacional. Este método consiste em um algoritmo para resolução de Problemas da Programação Linear (PPL), sendo este considerado a primeira técnica da Pesquisa Operacional. O Simplex é um algoritmo (sequência finita de instruções que termina em um número finito de operações) que faz uso de um ferramental baseado em álgebra linear para determinar, por um método iterativo, a solução ótima de um PPL.

3. O PROBLEMA DO ENSALAMENTO

Para tratar do problema de ensalamento diversos fatores podem ser considerados. Em uma formulação básica, deve ser considerada a quantidade de turmas, o número de alunos matriculados e a capacidade das salas de aulas. Para aprimorar a formulação do problema, outras variáveis podem ser incluídas, como por exemplo, proximidade entre turmas do mesmo curso, proximidade com laboratórios (para as turmas que utilizam constantemente esses

espaços), capacidade dos blocos de salas de aula e o deslocamento dos professores entre os diversos blocos.

A solução do problema consiste em gerar uma tabela de melhor alocação das turmas em cada sala de aula, visando minimizar os conflitos, maximizar preferências, compactar horários de professores e alunos e utilizar de maneira eficiente equipamentos e salas disponíveis. Em uma instituição de ensino nem sempre o grande problema é a designação de professores em turmas, já que muitas vezes o horário já é pré-definido para as disciplinas. Assim, o problema a ser solucionado passa a ser o de otimizar o espaço físico existente, designando salas e blocos em que as turmas terão aulas, de acordo com diversos critérios, como proximidade entre as turmas do mesmo curso, tamanho das salas, número de alunos matriculados, entre outros.

As principais restrições utilizadas na formulação do problema, que são comuns aos problemas de alocação de salas, são as seguintes: as aulas de duas disciplinas não podem ocorrer ao mesmo tempo em uma mesma sala; a aula de uma disciplina não pode ocorrer em mais de uma sala no mesmo instante; a capacidade da sala deve ser maior que o número de alunos inscritos para aquela aula. Cada restrição dessas impede a obtenção de soluções inviáveis, que só serão aceitas se todas essas forem atendidas simultaneamente.

O modelo matemático do problema do ensalamento é semelhante ao modelo de um PPL (1), conforme definido a seguir:

$$\begin{aligned}
 &\text{minimizar} && \sum_{i=1}^{nd} \sum_{j=1}^{ns} x_{ij} D_{ij} N_i && (3a) \\
 &\text{sujeito a:} && \sum_{j=1}^{ns} x_{ij} = 1 && i = 1, 2, \dots, nd && (3b) \\
 &&& \sum_{i=1}^{nd} x_{ij} = 1 && j = 1, 2, \dots, ns && (3c) \\
 &&& N_i x_{ij} \leq C_j && i = 1, 2, \dots, nd; j = 1, 2, \dots, ns && (3d)
 \end{aligned} \tag{3}$$

onde nd representa o número de disciplinas em estudo; ns o número de salas disponíveis; D_{ij} representa a distância entre o prédio sede da disciplina i e a sala j ; N_i é o número de alunos matriculados na disciplina i ; C_j é a capacidade da sala j ; e x_{ij} representa a alocação da disciplina i na sala j (variável de decisão do problema).

A função objetivo, Equação (3a), representa a distância total percorrida pelos alunos para ir do bloco sede da disciplina (também chamado de bloco de origem) até a sala de aula. A primeira restrição, Equação (3b), indica que somente uma sala será alocada para cada disciplina; a segunda restrição, Equação (3c), indica que somente uma disciplina será alocada em cada sala; e a terceira restrição, Equação (3d), indica que a capacidade de alunos de cada sala não será excedida.

O problema do ensalamento, da forma como está descrito em (3) é um problema de programação linear binário, pois cada variável x_{ij} vai assumir valor “1” quando a disciplina i for alocada na sala j e valor “0” caso contrário.

No caso em que o número de disciplinas é menor que o número de salas, a segunda restrição do problema, Equação (3c), passa a ser uma restrição do tipo “ $\leq$ ”, conforme descrito na Equação (4):

$$\sum_{i=1}^{nd} x_{ij} \leq 1 \quad j = 1, 2, \dots, ns \quad (4)$$

Essa equação indica que nem toda sala será ocupada por uma disciplina, ou seja, algumas salas ficarão ociosas.

4. ESTUDOS DE CASO

Para testar a validade da modelagem matemática abordada, foram realizados dois casos teste, baseados nos trabalhos de Morais e Silva (2011) e Kripka et al (2011). Os dados foram coletados diretamente de cada trabalho analisado e a implementação foi realizada no software MATLAB, através da utilização da função nativa “bintprog”, que resolve problema de programação inteira binária através do algoritmo de Branch&Bound.

4.1. Caso 1 - Modelagem para alocação de salas de aula em uma instituição de ensino superior.

O primeiro caso trata da utilização de uma estrutura de programação linear com adaptação do modelo de transporte à questão de alocação de salas e programação inteira mista. Neste caso foram utilizados dados fictícios de uma instituição de ensino, conforme apresentado por Morais e Silva (2011).

Os dados utilizados para a implementação estão descritos a seguir. O problema apresenta 35 disciplinas e 13 salas, sendo que cada sala possui três horários distintos, totalizando 39 salas para serem alocadas (uma sala para cada horário). Os números de alunos matriculados e as capacidades das salas foram gerados por números aleatórios, conforme apresentado nas Tabelas 1 e 2.

Tabela 1- Número de alunos matriculados por disciplina (Caso 1)

Disciplina	Nº de alunos	Disciplina	Nº de alunos	Disciplina	Nº de alunos
n1	33	n14	45	n27	50
n2	51	n15	59	n28	50
n3	41	n16	47	n29	50
n4	25	n17	48	n30	50
n5	35	n18	49	n31	50
n6	46	n19	28	n32	50
n7	31	n20	42	n33	50
n8	26	n21	59	n34	50
n9	46	n22	56	n35	49
n10	53	n23	60		
n11	57	n24	39		
n12	28	n25	47		
n13	33	n26	50		

Fonte: Morais e Silva (2011)

Tabela 2 - Capacidade das salas de aula (Caso 1)

Sala	Capacidade	Sala	Capacidade	Sala	Capacidade
c1	60	c14	60	c27	50
c2	60	c15	60	c28	50
c3	60	c16	60	c29	50
c4	60	c17	60	c30	50
c5	60	c18	60	c31	50
c6	60	c19	35	c32	50
c7	60	c20	35	c33	50
c8	60	c21	35	c34	60
c9	60	c22	50	c35	60
c10	60	c23	50	c36	60
c11	60	c24	50	c37	60
c12	60	c25	50	c38	60
c13	60	c26	50	c39	60

Fonte: Morais e Silva (2011)

A distância de cada prédio onde são divididas as salas de aula (Prédio 1, disciplinas de 1-7, Prédio 2 de 8-21 e Prédio 3 de 22-35), é dada através de penalidades, onde quanto mais distante um prédio do outro, maior a penalidade aplicada. Desta forma a otimização deve ocorrer de modo que cada disciplina e seu respectivo número de alunos aloquem-se em uma sala com capacidade igual ou superior a sua necessidade e com o menor deslocamento possível. As penalidades adotadas estão descritas na Tabela 3.

Tabela 3 - Penalidades (Caso 1)

De \ Para	Prédio 1	Prédio 2	Prédio 3
Prédio 1	1	2	3
Prédio 1	2	1	4
Prédio 1	4	3	1

Fonte: Morais e Silva (2011)

Como nesse caso o número de salas é maior que o número de turmas, a restrição (3c) é uma restrição de desigualdade. Esse problema apresenta 1.365 variáveis (número de salas vezes o número de disciplinas) e 1.439 restrições. A solução, obtida através do uso da função “bintprog” do MATLAB é apresentada na Tabela 4. Todas as salas ociosas foram todas do prédio 1, em diferentes horários (primeiras aulas das salas 4 e 5 e terceiras aulas das salas 1 e 2). Todas as disciplinas no prédio 1 foram alocadas no próprio prédio, que ainda recebeu as disciplinas do prédio 2 (8 e 10) e do prédio 3 (24 e 25). Os prédios 2 e 3 foram totalmente ocupados, recebendo disciplinas respectivas a cada um dos prédios.

Os resultados obtidos neste trabalho são equivalentes aos apresentados por Morais e Silva (2011), sendo que as disciplinas alocadas não exatamente iguais mas apresentam as mesmas penalidades.

Tabela 4 - Resultados Caso 1

Sala	Capacidade	1ª Aula	2ª Aula	3ª Aula
Prédio 1	Sala 1	24	25	
	Sala 2	2	1	
	Sala 3	8	5	3
	Sala 4		4	6
	Sala 5		10	7
Prédio 2	Sala 6	21	15	11
	Sala 7	13	12	19
	Sala 8	20	17	16
	Sala 9	18	9	14
Prédio 3	Sala 10	35	27	32
	Sala 11	26	30	31
	Sala 12	22	29	28
	Sala 13	33	34	23

4.2. Caso 2 - formulação para o problema de alocação de salas de aula com minimização de deslocamentos.

O segundo caso estudado segue a mesma problematização, o estudo foi feito pela Universidade de Passo Fundo e publicado nos anais do XLIII Simpósio Brasileiro de Pesquisa Operacional (KRIPKA et al, 2011). Para a resolução deste, foi empregado o método *Simulated Annealing*, que consiste em uma técnica matemática que faz uma simulação algorítmica do processo físico da têmpera de materiais, simula o processo de recozimento de metais. A energia em cada estado corresponde ao valor da função objetivo; o resfriamento gradativo de um material a partir de uma alta temperatura inicial leva o material a estados mínimos de energia. Essa energia mínima (se o problema for de minimização ou máxima, se de maximização) corresponde ao valor de uma solução ótima local, possivelmente global.

Para a resolução, foram considerados seis dias letivos para otimização da demanda de disciplinas da instituição. A solução do problema visa à minimização da distância a ser percorrida pelos alunos, com relação ao prédio de origem de seu curso. Desta forma, quando alguma turma necessite ser alocada em outro prédio que não o do seu curso, o custo dessa operação será obtido pelo produto da distância até o prédio, pelo número de alunos matriculados na disciplina correspondente. Os dados utilizados podem ser consultados nas Tabelas 5 e 6.

Tabela 5 - Dados gerais do Problema (Caso 2)

Dia	Nº Disciplinas	Nº Salas	Nº Alunos
Segunda-feira	28	36	685
Terça-feira	29	37	691
Quarta-feira	23	36	573
Quinta-feira	28	37	679
Sexta-feira	22	38	523
Sábado	10	36	224

Fonte: Kripka et al (2011).

Tabela 6 - Distância entre os prédios (Caso 2)

Prédios	1	2	3	4	5	6	7
1	0	218	292	420	112	413	190
2	218	0	390	212	325	140	430
3	292	390	0	605	380	520	305
4	420	212	605	0	521	70	570
5	112	325	380	521	0	500	112
6	413	140	520	70	500	0	100
7	190	430	305	570	112	100	0

Fonte: Kripka et al (2011).

Para este problema, Kripka et al (2011) apresentam também as disciplinas que acontecem na segunda-feira, com o número de alunos matriculados, e as salas disponíveis. Com esses dados, é possível otimizar o ensalamento para este dia e comparar os resultados com os apresentados. A Tabela 7 apresenta um resumo das 28 disciplinas consideradas para a segunda-feira, assim como os resultados obtidos. Novamente, utilizou-se a função “bintprog” do MATLAB para resolução do problema.

Os resultados obtidos satisfazem as restrições do problema, sendo que somente uma disciplina do prédio 2 foi alocada em outro prédio (prédio 4). Já as disciplinas do prédio 1 foram alocadas em diferentes prédios, de maneira a atender o número de alunos em cada uma. Não foi possível efetuar a otimização para os demais dias da semana pois não estão apresentadas no trabalho de Kripka et al (2011) as disciplinas para esses dias.

A distância média percorrida pelos alunos, segundo a solução obtida neste trabalho, é de 31,35 metros, valor inferior aos 39,56 metros obtidos por Kripka et al (2011).

Tabela 6 – Resultados Caso 2

Disciplina	Nº Alunos	Sede	Sala	Capacidade da sala	Prédio
1	16	1	35	25	5
2	30	1	6	70	1
3	21	1	5	55	1
4	19	1	2	20	1
5	23	1	4	25	1
6	18	1	3	20	1
7	13	1	33	30	5
8	30	1	10	30	1
9	14	1	36	25	5
10	19	1	1	20	1
11	7	1	26	54	3
12	12	1	20	45	2
13	21	1	9	30	1
14	13	1	32	25	5
15	27	1	7	50	1
16	23	1	12	25	1

17	14	1	34	25	5
18	20	1	8	20	1
19	35	1	11	70	1
20	26	2	17	38	2
21	31	2	16	35	2
22	68	2	13	75	2
23	23	2	21	40	2
24	48	2	31	50	4
25	21	2	15	25	2
26	25	2	18	26	2
27	18	2	19	40	2
28	30	2	14	40	2

5. CONSIDERAÇÕES FINAIS

Este trabalho apresentou dois estudos de caso do problema do ensalamento, o primeiro um caso fictício e o segundo obtido de uma instituição de ensino superior. O modelo foi implementado no software MATLAB, que possui um algoritmo de resolução e problemas inteiros mistos. Com isso, foi possível concentrar os esforços na modelagem do problema e análise dos resultados. Os resultados obtidos foram compatíveis com estudos anteriores e mostraram que a ferramenta é uma alternativa interessante para a resolução desse problema.

Na continuação dessa pesquisa, será abordado o problema de ensalamento da Unibrasil, com a utilização dos dados obtidos junto à instituição.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- ARENALES, M. N. Pesquisa Operacional: para cursos de engenharia. 6. ed. Rio de Janeiro: Elsevier, 2007.
- KRIPKA, R. M. L., KRIPKA, M. e DA Silva, M. C. Formulação para o problema de alocação de salas de aula com minimização de deslocamentos. Anais do XLIII Simpósio Brasileiro de Pesquisa Operacional, Ubatuba, 2011.
- LOPES, M. C.; SCHOEFFEL, P. Um método de designação para o problema de reservas de sala de aula. In: Congresso Brasileiro De Computação, II, Itajaí, 2002.
- MORAIS, R. R., SILVA, D. A. Modelagem para alocação de salas de aula em uma instituição de ensino superior. Convibra, 2011.
- SOUZA, M. J. F.; MACULAN, N; OCHI, L. S. Uma heurística para o problema de programação de horários em escolas. In: Congresso Nacional De Matemática Aplicada E Computacional, XXIII, São Carlos-SP. 2000.
- TAHA, Hamdy A. Pesquisa Operacional: uma visão geral. 8. ed. São Paulo: Pearson Prentice Hall, 2008.

Agradecimentos

Nossos agradecimentos aos professores orientadores, por disporem de seu tempo para contribuir ao nosso conhecimento e crescimento intelectual e pessoal. Ao coordenador do curso, por nos oferecer a oportunidade de desenvolvimento esta pesquisa e a Instituição de ensino que nos fornece a estrutura para realização deste projeto.

PROGRAMMING THE APPLICATION IN LINEAR RESOLUTION ENSALAMENTO PROBLEM

Abstract: Operational Research has played a very important role being used in solving complex and robust real problems such as the problem of vehicle routing, cutting materials in a factory, machine scheduling problems or tasks, production planning, localization issues, among others. This line of applications arise timetabling problems and definition of teacher schedules in schools and universities. These problems we seek to distribute different classes available in the rooms, respecting the number of students enrolled, capacity of rooms, physical restrictions and other constraints of educational institutions. The main objective is to minimize the distance to be traveled by students in shift between rooms. This work addressed the timetabling problem by studying their characteristics, their mathematical modeling, computational implementation and solution methods. They studied different techniques of linear programming and tested distinct models to the problem, seeking a solution that is viable both in theory and in practice. The timetabling mathematical model was implemented in MATLAB software and we used two separate cases to test and validate this development. Thus, the problem to be solved becomes to optimize the existing physical space, assigning rooms and blocks in which the courses will have classes, according to several criteria, such as proximity between classes of the same course, size of rooms, number of students enrolled, among others.

Key-words: Linear Programming, Optimization, Timetabling problem.