

APLICAÇÃO PRÁTICA DE CÁLCULO INTEGRAL E DIFERENCIAL EM UM BALÃO DE AR QUENTE

CASTRO, Fernando Andrade (Engenharia de Produção – UNIBRASIL)

CASTRO, Karine Oliveira (Engenharia de Produção – UNIBRASIL)

VILELA, Luana Cruz (Engenharia de Produção – UNIBRASIL)

Resumo: Buscando entender a funcionalidade do balão de ar quente percebemos a possibilidade da aplicação de cálculo, a partir do estudo de algumas teorias físicas tanto em sua dimensão (área e volume), quanto em suas funções mecânicas (combustão), pois, além do cálculo das medidas que são possíveis, também podemos estudar a força que retira o balão da inércia. Os variados tipos de propriedades aplicáveis que podem ser estudadas acerca do movimento de flutuação do balão nos instigou a aprofundar nossos conhecimentos sobre este assunto utilizando os temas estudados em Cálculo Integral e Diferencial. Iremos apresentar um protótipo com os cálculos aplicáveis neste, onde, mostraremos a possibilidade de compreender seu funcionalismo, através da apuração dos dados e emprego das funções. O projeto será desenvolvido, baseado na teoria de Arquimedes, sobre corpos flutuantes, que diz que “Um corpo submerso em um fluido em equilíbrio, sofre a ação de uma força, denominada empuxo, a qual é vertical, para cima e a intensidade é igual a do peso do fluido deslocado.” Fundamentaremos nosso estudo na expressão matemática do empuxo, que é uma força vertical exercida por um fluido em repouso (e sob a ação da gravidade) sobre um corpo total ou parcialmente submerso.

Palavras-chave: Empuxo, Balão, Densidade, Cálculo.

Para realizar um estudo sobre o Cálculo, necessitaríamos de uma pesquisa muito extensa cujo resultado final seria, sem dúvida, um texto longo que estaria além do propósito deste trabalho. O nosso intuito é o de apresentar um estudo que possa fazer com que o Cálculo seja melhor compreendido dentro do nosso cotidiano, e, para isso, nos aprofundamos em sua aplicação dentro de um dos interesses mais antigos do homem: o voo.

Desde a mitologia grega até os tempos atuais o voo é um fascínio do homem. A história nos apresenta um astrônomo e matemático grego Archytas de Tarentum quem construiu o primeiro dispositivo capaz de “voar”, semelhante a asa de um pássaro, porém, o dispositivo não se mantinha muito tempo no ar, devido a ter apenas um impulso para alçar voo e permanecia planando no ar por um longo tempo no ar.

Esses voos proporcionaram muitas descobertas nos estudos realizados, e então, podemos acompanhar o filósofo, matemático, físico e inventor grego Arquimedes de Siracusa (287a.C. - 212a.C.) em seu livro intitulado Sobre o Equilíbrio dos Corpos Flutuantes, que diz: Quando um corpo flutua em um fluido (líquido ou gás), seu peso é igual ao do fluido deslocado e, quando submerso, seu diminui daquela quantidade. Após isso, esse princípio passou a ser conhecido como o Princípio de Arquimedes (PA).

Apesar de muito empenho naquela época, nenhum dispositivo que fosse capaz de transportar as pessoas no ar foi capaz de levantar voo.

A primeira máquina voadora que alçou voo foi construída pelo cientista e inventor brasileiro, o padre secular Bartolomeu Lourenço de Gusmão (1685-1724), que também precisou de uma longa jornada de tentativa e erro para que apenas em 03 de outubro de 1709, na ponte da Casa da Índia, fizesse uma nova experiência conseguindo

e elevar um balão, maior que os demais utilizados em outras ocasiões, porém ainda incapaz de carregar uma pessoa, e que flutuou por um tempo e pousou suavemente.

O primeiro balão tripulado foi construído pelos irmãos Montgolfier, Joseph Michel (1740-1810) e Jaques Étienne (1745-1799). Em 05 de junho de 1783, eles exibiram um balão que tinha 32 m de circunferência, feito de linho e que foi cheio com fumaça de uma fogueira de palha seca, subindo cerca de 300 m, voou durante cerca de 10 minutos e pousou depois de percorrer uma distância em torno de 3 km.

Como todas as descobertas da ciência, após as primeiras tentativas bem sucedidas, pôde ser aprimorada e adaptada à varias situações, hoje encontramos lugares em que os passeios de balão acontecem e são perfeitamente dominados.

Para compreender o desenvolvimento desta experiência é preciso se aprofundar nos estudos de Cálculo Integral, porém, é difícil descrever com precisão onde este se originou, muitos matemáticos contribuíram para o desenvolvimento das técnicas e estudo das aplicações, alguns até não tão estruturados quanto outros. A conciliação das partes conhecidas e utilizadas, aliada ao desenvolvimento e aperfeiçoamento das técnicas, aconteceu com Newton e Leibniz que deram origem aos fundamentos mais importantes do Cálculo: as Derivadas e as Integrais.

Na Grécia havia um problema chamado quadraturas (A palavra quadratura é um termo antigo que se tornou sinônimo do processo de determinar áreas.) eram as de figuras curvilíneas, como o círculo, ou figuras limitadas por arcos de outras curvas, nesse contexto, Arquimedes é novamente uma figura importante para solucionar essa questão, sendo uma das maiores contribuições para o Cálculo, surgiu por volta do ano 225 a.C., trata-se de um teorema para a quadratura da parábola.

Outras "integrações" foram realizadas por Arquimedes a fim de encontrar o volume da esfera e a área da superfície esférica, o volume do cone e a área da superfície cônica, a área da região limitada por uma elipse, o volume de um parabolóide de revolução e o volume de um hiperbolóide de revolução. Neste caso, utilizaremos as integrações para encontrar o volume.

O Cálculo Integral é o estudo das definições, propriedades, e aplicações de dois conceitos relacionados, as integrais indefinidas e as integrais definidas. O processo de encontrar o valor de uma integral é chamado integração. Temos então dois tipos de integral: Indefinida e Definida.

Nosso estudo permeia a integral definida, que se insere uma função e extrai um número, o qual fornece a área entre o gráfico da função e o eixo do x. A definição técnica da integral definida é o limite da soma das áreas dos retângulos, chamada Soma de Riemann. A noção de integral definida pode ser estendida para funções de duas ou mais variáveis. Para o desenvolvimento dos cálculos aplicáveis ao exemplo do voo do balão, a integral dupla, que é a extensão para a função de duas variáveis será fundamental.

Instigados por esse interesse comum no voo do balão, desenvolvemos os cálculos que nos apresentam como é possível que um objeto flutue no ar, apresentando as forças atuantes e as teorias envolvidas.

Partimos da teoria do Empuxo, que representa a força resultante exercida pelo fluido sobre um corpo. Arquimedes descobriu que todo o corpo imerso em um fluido em equilíbrio, dentro de um campo gravitacional, fica sob a ação de uma força vertical, com sentido oposto à este campo, aplicada pelo fluido, cuja intensidade é igual a intensidade do Peso do fluido que é ocupado pelo corpo.

A Hidrostática é a parte da Física que estuda os fluídos (tanto líquidos como os gasosos) em repouso, ou seja, que não estejam em escoamento (movimento). Para

aplicarmos a teoria de Arquimedes, precisaremos definir a massa específica do ar e a massa específica do gás dentro do balão:

ρ = massa específica (kg / m³)

A equação que define a massa específica do ar:

$$\rho_{\text{ar}} = \frac{PM}{RT}$$

$$PV = \frac{m}{M}RT$$

$$\frac{PM}{RT} = \frac{m}{V} \cong \rho$$

Temos então:

$$\rho \cong \frac{PM}{RT}$$

Onde:

P = pressão [Pa]

M = Massa Molar [$\frac{KG}{KMOL}$]

R = Constante universal do gás perfeito (8,31J/mol.K)

T = Temperatura [K]

Definimos então o empuxo a partir da equação:

$$E = \rho_{\text{ar}} * Vol . g$$

$$P = mg = \rho_{\text{gás}} * vol * g$$

$$E = \rho_{\text{ar}} * vol * g$$

A partir daí podemos ter três situações:

$\rho_{\text{ar}} = \rho_{\text{gás}}$ = Fica em equilíbrio (parado).

$\rho_{\text{ar}} > \rho_{\text{gás}}$ = Afunda.

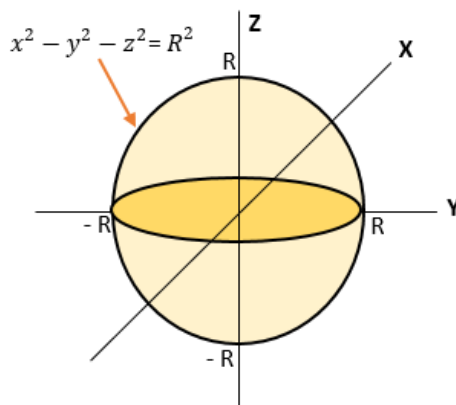
$\rho_{\text{ar}} < \rho_{\text{gás}}$ = Sobe ate estar em equilíbrio.

Para que o balão flutue, temos que chegar a condição: $P = E$

$$\rho_{\text{gás}} * v * g + \text{massa} * g = \rho_{\text{ar}} * \text{vol} * g$$

$$\text{Massa} = (\rho_{\text{ar}} - \rho_{\text{gás}}) * \text{vol}$$

Nessa equação, precisaremos do volume, que será definido a partir da integral dupla:



Considerando os três eixos x,y e z, o volume do círculo será dado a partir da equação:

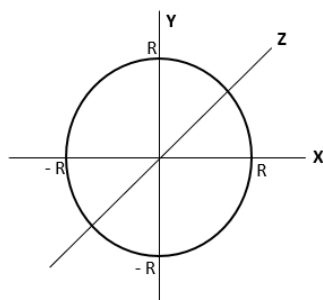
$$Z^2 = R^2 - x^2 - y^2$$

$$Z = \pm(\sqrt{R^2 - x^2 - y^2})$$

$$Z = f(x, y) = (\sqrt{R^2 - x^2 - y^2})$$

Integraremos apenas metade do volume do círculo:

$$\frac{V}{2} = \iint d \sqrt{R^2 - x^2 - y^2} dA$$



$$\frac{V}{2} = \int_0^{2\pi} \int_0^R (\sqrt{R^2 - r^2}) r dr d\theta$$

$$\int_0^R (\sqrt{R^2 - r^2}) r \, dr$$

$$\int_{R^2}^0 (\sqrt{u}) \left(\frac{du}{-2} \right) \begin{cases} u = R^2 - r^2 \\ du = -2 r \, dr \\ r \, dr = \frac{du}{-2} \end{cases}$$

$$-\frac{1}{2} \int_{R^2}^0 (\sqrt{u}) du$$

$$\frac{1}{2} \int_0^{R^2} u^{\frac{1}{2}} du$$

$$\frac{1}{2} x \frac{u^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} \Big|_0^{R^2}$$

$$\frac{1}{3} u^{\frac{3}{2}} \Big|_0^{R^2}$$

$$\frac{1}{3} (R^2)^{\frac{3}{2}} = \frac{1}{3} R^3$$

$$\frac{V}{2} = \int_0^{2\pi} \frac{1}{3} R^3 d\theta$$

$$\frac{V}{2} = \frac{1}{3} R^3 \int_0^{2\pi} d\theta$$

$$\frac{V}{2} = \frac{1}{3} R^3 \theta \Big|_0^{2\pi}$$

$$\frac{V}{2} = \frac{1}{3} R^3 2\pi$$

$$V = \frac{1}{3} R^3 2\pi$$

$$V = \frac{4\pi}{3} R^3$$

Esse volume, que pode ser encontrado na equação do Empuxo de Arquimedes, pode então, ser também definido por integral.

Finalizamos com a equação abaixo, que compõe todas as equações encontradas.

$$\text{Massa} = (\rho_{\text{ar frio}} - \rho_{\text{gás}}) * \frac{4\pi}{3} R^3$$

UMA BREVE INTRODUÇÃO À HISTÓRIA DO CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL. Curitiba. Colégio Militar de Curitiba. 2010

BASSALO, J. M. F. **Uma Breve História da Aviação**. Disponível em: <<http://www.searadaciencia.ufc.br/folclore/folclore291.htm>> Acesso em: 15 out. 2015.
WHITE, Frank M. Mecânica dos fluídos. 6. Ed. ANGH Ltda. Porto Alegre: Santana, 2011. 101 p.

HOFFMANN, Lautence D., BRADLEY, Gerald L. Cálculo – Um curso moderno e suas aplicações. 7. Ed. LTC Editora Ltda. Rio de Janeiro: Rio de Janeiro, 2002. 311 p.

ANTON, Howard, BIVENS, Irl, DAVIS, Stephen. Cálculo. 2. Ed. ARTMED. Porto Alegre: Santana, 2007. 386 p.

PRACTICAL APPLICATION OF DIFFERENTIAL AND INTEGRAL CALCULUS IN A HOT AIR BALLOON

Abstract: Seeking to understand the functionality of hot air balloon realized the possibility of applying calculation, from the study of some physical theories both in their size (area and volume) and in its mechanical functions (combustion) because in addition to the calculation of measures are possible, we can also look at the inertial force that pulls the balloon .The various relevant types of properties that can be studied on the balloon floating movement prompted us to further our knowledge of the subject studied in subjects using the Integral Calculation and Differential. We will present a prototype to the calculations apply this where we will show the ability to understand their functionalism, by calculating the data and job functions. The project will be developed, based on Archimedes' theory on floating bodies, which says that "A body immersed in a fluid at equilibrium, suffers the action of a force called thrust, which is vertical, up and the intensity is equal the weight of the displaced fluid. "will base our study on the mathematical expression of thrust, which is a vertical force exerted by a fluid at rest (and under the action of gravity) on a full or partially submerged body.

Key-words: Thrust Balloon, Density, Calculation.